

TD 12. Calculs matriciels

12.1 Opérations

Exercice 12.1

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer AB et BA .
2. Calculer ${}^t(AB)$, tA , tB et ${}^tB{}^tA$.
3. Calculer $\text{Tr } A$, $\text{Tr } B$, $\text{Tr}(AB)$ et $\text{Tr}(BA)$.
4. Développer $(A + B)^2$.

Exercice 12.2

Calculer lorsque c'est possible les produits AB et BA .

$$1. A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$2. A = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1) \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$3. A = (1) \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

12.2 Inverses

Exercice 12.3 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 12.4

Calculer l'inverse des matrices

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2. B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

12.3 Rang

Exercice 12.5

Soient X et Y deux matrices colonnes.

1. Montrer que $X^t Y$ est de rang 1.
2. Montrer que toute matrice carrée A de rang 1 peut s'écrire de la forme ci-dessus.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A^2 = \lambda A$.

Exercice 12.6

Déterminer le rang des matrices suivantes. Dans l'éventualité où il serait maximal pour une matrice carrée, calculer l'inverse de la matrice.

$$\begin{array}{lll} 1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & 2. B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, & 3. A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

12.4 Autres outils

Exercice 12.7

Trouver si c'est possible deux matrices carrées A et B telles que $AB - BA = I_n$.

Exercice 12.8

Soient A et B deux matrices carrées telles que $AB - BA = B$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\text{Tr}(B^k) = I_n$.