TD 9. Arithmétique des polynômes

9.1 Opérations

Exercice 9.1

Calculer $P = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)\dots(1+X^{2^n})$ *(indication : on pourra calculer* $(1-X)P$*).*

Exercice 9.2

1. Déterminer les coefficients du polynôme $(1+X+X^2+\dots+X^n)^2$.
2. En déduire les coefficients du polynôme $(1-X+X^2+\dots+(-1)^nX^n)^2$.

Exercice 9.3

Trouver tous les polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

1. $Q^2(X) = XP^2(X)$,
2. $P \circ P = P$,
3. $P(X^2) = P(X)$,
4. $P(X+1) = XP(X)$,
5. $P'^2 = 9P$,
6. $P - XP' = X$.

Exercice 9.4

Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

1. $A = X^5 + X^2 + 1$ et $B = X^3 - 3X^2 + 8X - 21$,
2. $A = 1 + 6X^2 + 4X^3 - 5X^4$ et $B = X^2 - 5X + 3$,
3. $A = X^3 + iX^2 + X$ et $B = X - i + 1$,
4. $A = X^n + 2X - 2$ et $B = (X-1)^2$.

Exercice 9.5

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a, b \in \mathbb{K}^2$.

1. Calculer en fonction de $P(a)$ et $P(b)$ le reste dans la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
2. Calculer en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$ le reste dans la division euclidienne de P par $(X-a)^2$.

Exercice 9.6 *Polynômes de Lagrange*

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$, on définit le polynôme

$$L_i = \frac{\displaystyle\prod_{j;\, j \neq i} (X - a_j)}{\displaystyle\prod_{j;\, j \neq i} (a_i - a_j)}.$$

1. Montrer que pour tous $0 \leqslant i, j \leqslant n$, on a $L_i(a_j) = 0$ ou 1 (préciser les cas).
2. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Montrer que

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i(X).$$

9.2 Racines et factorisation

Exercice 9.7

1. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $Q = X^2 + X + 1$.
2. Soient $m, n, p \in \mathbb{N}$. Montrer que Q divise $X^{3m+2} + X^{3n+1} + X^{3p}$.
3. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le polynôme $(X+1)^n + X^n + 1$ est-il divisible par Q ?

Exercice 9.8

Soit $P = X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9$.

1. Montrer que 3 est racine double de P.
2. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 9.9

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $(X-1)|P(X^k) \Rightarrow (X-1)|P$.
2. Montrer que $(X^2+X+1)|(P(X^3) + XQ(X^3)) \Rightarrow (X-1)|P$ et $(X-1)|Q$.

Exercice 9.10

Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = P(1) = P'(1) = 0$ et $P'(0) = 2$.

Exercice 9.11

Quel est l'ordre de la racine 1 dans le polynôme $X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$?

Exercice 9.12

Montrer que le polynôme $P = 1 + X + \dfrac{X^2}{2!} + \ldots + \dfrac{X^n}{n!}$ n'a pas de racine multiple.

Exercice 9.13

Décomposer en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $X^4 + X^2 + 1$,
2. $X^6 + 1$,
3. $X^2 - X + 1)^2 + 1$,
4. $X^8 + X^4 + 1$,
5. $X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.